UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS

JUNIO DE 2008

Ejercicio de: MATEMÁTICAS II

Tiempo disponible: 1 h. 30 m.

Se valorará el uso de vocabulario y la notación científica. Los errores ortográficos, el desorden, la falta de limpieza en la presentación y la mala redacción, podrán suponer una disminución hasta de un punto en la calificación, salvo casos extremos.

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En cada uno de los tres apartados el alumno elegirá entre una de las dos opciones

1. ÁLGEBRA

OPCIÓN A

a) (1.5 puntos) Sean A, B, I las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & -3 & -4\\ -3 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2 = B$.

b) (1 punto) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x & 1/4 & 4\\ y & 0 & 4\\ z & 1/2 & 12\end{vmatrix}$

OPCIÓN B

a) (2.5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases}x+3y-az=4\\ -ax+y+az=0\\ -x+2ay=a+2\\ 2x-y-2z=0\end{cases}$

discutirlo según los valores de a, y resolverlo cuando sea compatible.

2. GEOMETRÍA

OPCIÓN A

Considerar la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-5}=\dfrac{z+3}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x+4y+4z=5$

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1.5 puntos) Calcular la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a r.

OPCIÓN B

a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π.

b) (1.25 puntos) Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1,0,2)$ sea $\sqrt{5}$.

3. ANÁLISIS

OPCIÓN A

1. Sea

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \log\sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}} \end{array}$$

a) (0.75 puntos) Calcular el dominio $f(x)$.

b) (0.75 puntos) Estudiar si $f(x)$ es una función par.

c) (1 punto) Calcular las asíntotas de $f(x)$.

2. a) (1.25 puntos) Dada $F(x)=\int_0^x t\ sen(t)dt$, estudiar si $x=\pi$ es una raíz de $F'(x)$.

b) (1.25 puntos) Calcular el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}}=1$$

OPCIÓN B

1. Sean las funciones

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & |x| \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & sen(x) \end{array}$$

a) (0.75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de $f(x)$.

b) (0.75 puntos) Calcular la derivada de $(f\ o\ h)(x)$.

c) (1 punto) Obtener el área del recinto limitado por f y g entre $x=0$ y $x=1$.

2. (2.5 puntos) Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x)=\begin{cases} 6-x/2, & x<2 \\ x^2+kx, & x\geq 2 \end{cases}$ es continua. Estudiar si su derivada es una función continua.